



## APLICAÇÃO DE ELEMENTOS DE JUNTA NA ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

**Fernando Hipólito**

**Raúl Durand**

**Eduardo Pains**

150096119@aluno.unb.br

durand@unb.br

150095881@aluno.unb.br

Afiliação

Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900, Brasília/DF, Brasil

**Resumo.** *Devido à composição heterogênea do concreto armado, esse material apresenta uma grande variedade de comportamentos quando solicitado mecanicamente. Em virtude disso torna-se importante o desenvolvimento de estudos numéricos com objetivo de complementar a compreensão desse material. Dentre os métodos numéricos, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos que possui maior versatilidade na análise estrutural, sendo por esse motivo, bastante empregado no estudo do concreto armado. Porém, para a adequada representação do concreto armado, pelo MEF, é necessário, além da modelagem do aço e do concreto, a simulação das discontinuidades que surgem na interface aço-concreto e aquelas devido à fissuração do próprio concreto. Em vista disso, este trabalho propõe simular essas discontinuidades por meio de elementos de junta, visando obter melhores previsões do comportamento do concreto armado.*

**Palavras Chave:** *Elemento de junta, Elementos Finitos, Fissuras, Elemento de interface*

# 1 INTRODUÇÃO

Devido a complexidade da natureza, torna-se uma tarefa difícil a compreensão adequada do comportamento físico da mesma. Com o concreto armado não é diferente. Em virtude disso, os estudos experimentais desse material são de suma importância para o cálculo e desenho das estruturas. Porém a execução rotineira de ensaios esbarra em obstáculos como custos elevados, falta de equipamentos, falta de mão de obra especializada para operar os equipamentos, entre outros. Logo, torna-se importante o desenvolvimento de estudos numéricos com objetivo de complementar a compreensão desses comportamentos físicos.

Dentre os métodos numéricos, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos que possui maior versatilidade para na análise de estruturas, sendo por esse motivo, bastante empregado no estudo do concreto armado. Entretanto, para aplicação desse método é necessário simular o comportamento mecânico dos materiais através do uso de modelos constitutivos (equações matemáticas). Tais modelos são deduzidos por meio de princípios mecânicos e experimentos.

Devido a composição heterogênea do concreto armado, esse material apresenta grande variedade de comportamentos, em virtude disso torna-se interessante o uso de novos modelos constitutivo para simulá-lo. Porém, a adequada representação dos materiais que compõe o concreto armado não é suficiente para simulá-lo de forma satisfatória, sendo necessário também a simulação das descontinuidades que surgem entre os seus componentes (aço e concreto) e devido a fissuração do concreto. Entretanto, o Método dos Elementos Finitos normalmente representa o domínio como um meio contínuo, portanto, a representação de descontinuidades por esse método não é uma tarefa simples.

Visando contribuir com modelos mais realistas, este trabalho, simula a interface aço-concreto, bem como, as fissuras por meio de elementos de junta. Através dessa abordagem é possível obter maior controle sobre os parâmetros que interferem nessas descontinuidades e com isso melhores previsões no comportamento das descontinuidades são obtidos.

## 2 ELEMENTOS FINITOS APLICADO AO CONCRETO ARMADO

Na literatura de elementos finitos encontra-se as abordagens mais usuais utilizadas para modelar a interação aço-concreto, bem como, a fissuração no concreto armado. A seguir é realizado uma breve revisão sobre esses modelos empregados na simulação do concreto.

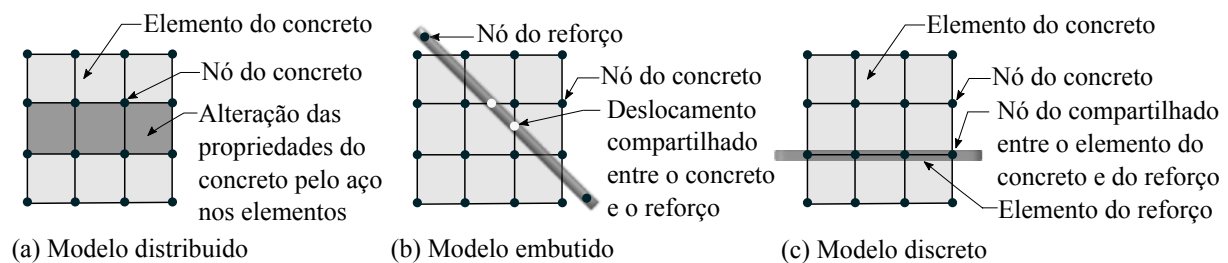
### 2.1 Modelos para simular a interação entre o aço e o concreto

Para uma adequada representação numérica e computacional do concreto armado se faz necessário encontrar uma maneira de simular a interação entre aço e o concreto. Na literatura de elementos finitos é possível identificar as três abordagens mais difundidas na modelagem do aço numa estrutura de concreto armado: o modelo distribuído (*the distributed model*), o modelo embutido (*the embedded model*) e o modelo discreto (*the discrete model*).

No modelo distribuído, de acordo com Kwak e Fillippou (1990), o aço é assumido como estando distribuído uniformemente ao longo do elemento de concreto com uma dada distribuição regular e uma orientação angular, como pode ser visto na Fig. 1 (a). Neste caso, a relação constitutiva é atribuída ao composto homogêneo aço-concreto, o que, no entanto, exige que seja assumido a aderência perfeita entre os dois materiais.

Por sua vez, o modelo embutido, visto na Fig. 1 (b), estabelece que as barras da armadura estejam incorporadas nos elementos sólidos do concreto de tal maneira que os deslocamentos entre os dois materiais são compartilhados devido à suposição do perfeito vínculo entre o aço e o concreto. A principal vantagem desse modelo é permitir a inserção arbitrária da armadura no concreto, sem a necessidade da coincidência entre os nós dos elementos de concreto e do reforço. Isso permite que estruturas com distribuição complexas das armaduras sejam mais eficientemente analisadas por esse método. Além disso, essa abordagem permitiu a atribuição de rigidez diferente para cada material.

Enquanto no modelo discreto as barras de aço são modeladas como elementos de treliça discretos, cujos nós são coincidentes com os dos elementos de concreto como visto na Fig. 1 (c). De tal forma, que a cada nova configuração da armadura se faz necessário um novo modelo de malha para que os nós dos elementos do concreto continuem a coincidir com os nós dos elementos de reforço. Entretanto, a grande vantagem dessa abordagem é a possibilidade de incluir o escorregamento do aço em relação ao concreto circundante por meio do uso de elementos de junta que permite simular a interface aço-concreto.



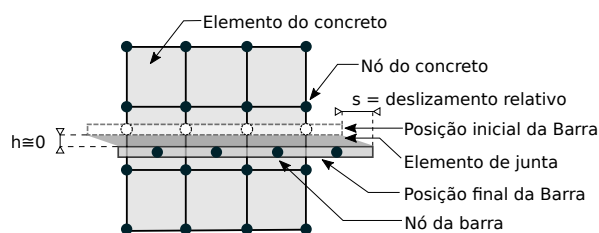
**Figura 1: Representação dos modelos (a) distribuídos, (b) embutido e (c) discretos. Modificado de Azimi et al. (2014).**

Conforme Durand e Farias (2012), os três modelos expostos não são capazes de simular de forma adequada a interface aço-concreto, o que representa uma grave deficiência nos modelos, uma vez que essa região pode ser uma zona de ruptura crítica. Em virtude disso, Durand (2008) apresenta o método semi-embutido, que procura superar as deficiências dos modelos anteriores através da união das principais características dos modelos discreto e embutido.

O modelo semi-embutido, como pode-se observar na Fig. 2, permite que as barras da armadura sejam embutidas arbitrariamente nos elementos de concreto, porém os elementos de reforço ainda permanecem como elementos discretos, uma vez que possuem nós próprios e independentes, acrescentando assim, novos graus de liberdade ao sistema (Durand, 2008). Nessa abordagem as barras de aço são ligadas aos elementos sólidos por meio de elementos de juntas que possuem a capacidade de avaliar as tensões cisalhantes no contato e o deslocamento relativo, sendo necessário atribuir a esses elementos parâmetros de rigidez de contato e a tensão de ruptura.

## 2.2 Modelos para simular fissuras

A perda de integridade do concreto armado devido à fissuração é também um tema essencial para a sua modelagem, ao ponto que altera significativamente as suas propriedades. Ao mesmo tempo, a fissuração é um tópico de difícil abordagem pelo método dos elementos finitos à medida que gera descontinuidade no campo de deslocamentos. Na literatura, referente a

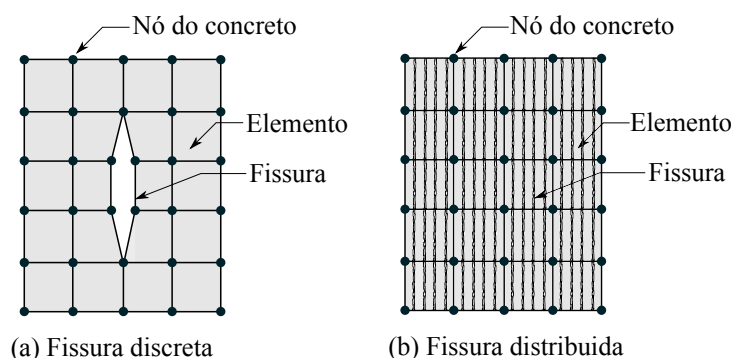


**Figura 2: Representação do modelo semi-embutido.**

elementos finitos, é possível identificar duas vertentes principais utilizadas na modelagem das fissuras em estruturas de concreto armado: a dos modelos de fissuras discretas (*discrete crack model*) e a dos modelos de fissuras distribuídas (*smeared crack model*).

Na representação da forma discreta, conforme Kwak e Fillippou (1990), as fissuras são modeladas como descontinuidades dos deslocamentos entre os elementos finitos, através da separação dos pontos nodais da malha, como pode-se observar na Fig. 3 (a). Esse método provoca o aumento do número de nós e consequentemente dos graus de liberdades, em virtude disso há o aumento do esforço computacional ao calcular a matriz de rigidez global da estrutura. Além disso, esse modelo limita a abertura de fissuras às interfaces dos elementos, o que gera uma restrição na propagação das mesmas. Essas desvantagens limitaram, por muito tempo, a aplicação desse modelo a problemas que envolvessem fissuras dominantes; porém com o aumento do poder de processamento dos computadores tanto o problema do custo computacional como do refinamento da malha puderam ser contornados.

Por outro lado, na representação do modelo de trinca distribuído, ainda de acordo com Kwak e Fillippou (1990), uma faixa de fissuras em paralelo é formada em todo o volume do elemento em questão, finamente espaçada e perpendicular à tensão principal, como pode-se verificar na Fig. 3 (b). Nesse modelo, o concreto fissurado é representado como um material ortotrópico elástico com reduzido módulo de elasticidade na direção normal ao plano de fissuração. Pelo fato de não haver adição de novos graus de liberdade nesse método, o custo computacional é menor se comparado com o método anteriormente apresentado. No entanto, esse modelo tem capacidade limitada para modelar descontinuidades nítidas, funcionando melhor quando as fissuras encontram-se espalhadas pelo material, como em aplicações em concreto armado.



**Figura 3: Representação dos modelos de fissuras (a) discretas e (b) distribuídas. Modificado Kwak e Fillippou (1990).**

Os dois modelos, apesar de possuírem abordagens diferentes, podem representar o mesmo

comportamento estrutural global caso a energia de deformação liberada pelo abrandamento da rigidez ocasionado pelo modelo de fissura distribuída for igual à energia de deformação liberada pela abertura de fissuras discretas.

### **3 ELEMENTOS DE JUNTA/INTERFACE**

Os elementos de junta são elementos finitos, geralmente de espessura nula ou muito pequena, utilizados para descrever o comportamento de descontinuidades entre um ou mais materiais. Estes elementos permitem quantificar o deslocamento relativo entre duas superfícies e as tensões cisalhantes e normal associadas. Pode-se ainda utilizar essa capacidade para simular o comportamento das fissuras.

Na prática, há uma variedade de estruturas com descontinuidades, onde a idealização de aderência perfeita entre as superfícies de contato é questionável. Nesses casos as descontinuidades desempenham um papel importante no comportamento físico do sistema, podendo atuar como um precursor de uma falha (Tzamtzis, 1998). Desta forma, a apropriada identificação da natureza do contato e o uso de elementos de interface em simulações numéricas permitem a obtenção de resultados mais realistas.

Visando representar de forma mais adequada a descontinuidade gerada pela interface aço-concreto, utilizou-se o modelo semi-embutido que faz uso do elemento de junta para simular essa interface. Através desse elemento é possível obter as tensões cisalhantes no contato e o deslocamento relativo entre o aço e o concreto, além de permitir atribuir parâmetros de rigidez de contato e tensão de ruptura a essa interface. Ademais, o elemento de junta foi utilizado para simular a descontinuidade gerada pela fissuração do concreto, através da inserção dos mesmo entre os elementos sólidos da malha, possibilitando a obtenção das tensões cisalhantes e normal na interface concreto-concreto, bem como os deslocamentos relativos por conta da fissuração.

### **4 MODELOS CONSTITUTIVOS EMPREGADOS NA ANÁLISE**

Conforme Ottosen (1977), o uso de modelos constitutivos inadequados para os materiais é um dos principais fatores limitantes da análise estrutural. Isso se deve a enorme complexidade de modelar matematicamente, de forma condizente com a realidade, o comportamento dos materiais. Por isso torna-se de suma importância a busca de modelos constitutivos que represente de forma mais adequada ao comportamento obtido experimentalmente. A seguir descreve-se os modelos empregado nesse trabalho.

#### **4.1 Modelo constitutivo do concreto**

O concreto é um material heterogêneo que possui comportamento extremamente complexo, em virtude disso, torna-se necessário adotar hipóteses simplificadoras do comportamento desse material para a simulação do mesmo. Neste trabalho o concreto é simulado como um material de comportamento isotrópico, elástico e linear. Com tal modelo pretende-se simular o comportamento elástico-linear do concreto, enquanto que o comportamento não linear do mesmo será simulado por elementos de junta localizados entre os elementos sólidos da malha.

O modelo elástico mostra-se extremamente simples, uma vez que necessita apenas de duas propriedades do material, para poder simular de forma adequada esse comportamento. Esse

modelo é dado pela lei de Hooke's generalizada que pode ser expressa em notação indicial, através de:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \delta_{ij} \quad (1)$$

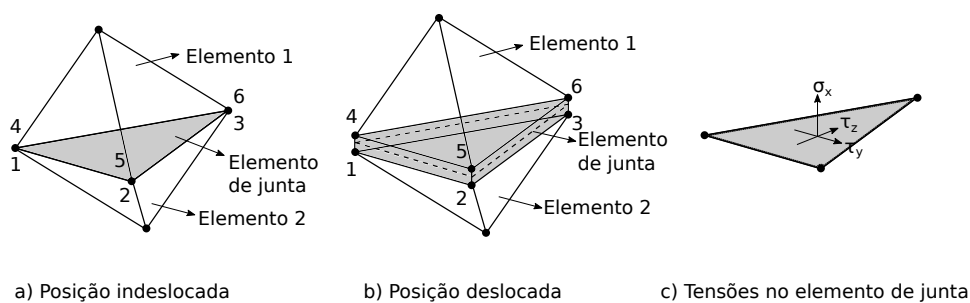
onde  $\varepsilon_{ij}$  e  $\sigma_{ij}$  são, respectivamente, os componentes do vetor deformação e os componentes do vetor tensão, enquanto  $\nu$  e  $E$  representam, respectivamente, o coeficiente de Poisson e o módulo de Young e por fim,  $\delta_{ij}$  representa o delta de Kronecker. A relação descrita pela Equação 1 é utilizada para obter a matriz constitutiva inversa,  $\mathbf{D}$ , que relaciona o vetor de tensão,  $\boldsymbol{\sigma}$ , com o vetor de deformação,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , como pode-se observar na equação  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ . A matriz constitutiva inversa  $\mathbf{D}$  é utilizado em elementos finitos para calcular a matriz de rigidez de um elemento:

$$\mathbf{K} = \iiint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} J d\xi d\eta d\zeta \quad (2)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez do elemento finito,  $\mathbf{B}$  é matriz deformação-deslocamento,  $J$  representa o jacobiano e  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  representa o sistema de coordenadas locais.

## 4.2 Modelo constitutivo do elemento de junta da interface concreto-concreto

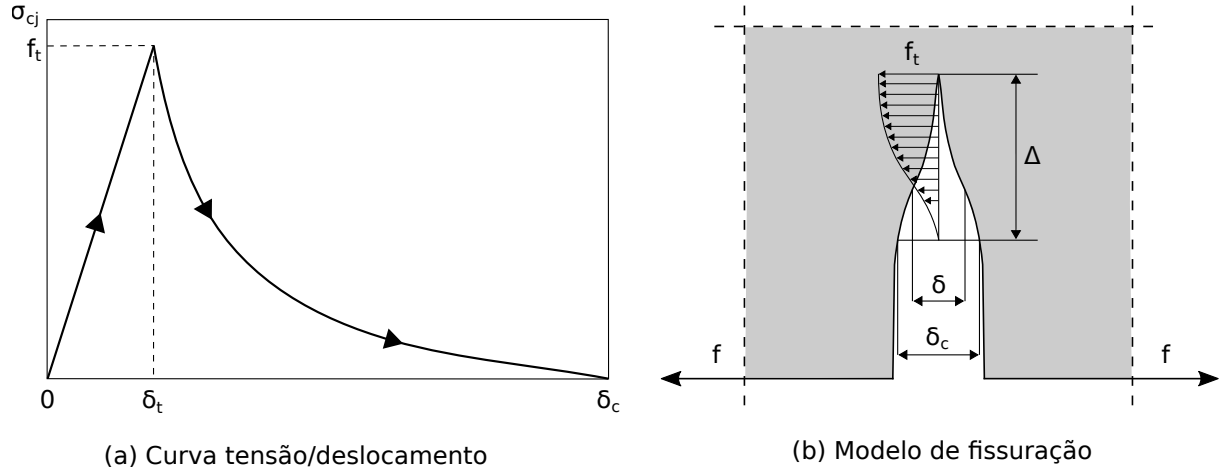
A não linearidade do concreto, decorrente da fissuração do mesmo, será simulada através dos elementos de junta inseridos entre os elementos de concreto da malha. A abordagem empregada por Zivaljic, et al. (2014) foi utilizada como base para a implementação deste elemento. Em tal modelo, os nós das faces de dois elementos de concretos vizinhos são independentes apesar de compartilharem a mesma posição, enquanto a estrutura ainda não está deslocada. Entre os elementos de concreto há um elemento de junta inicialmente com espessura nula, como pode-se observar na Fig. 4 (a), a medida que a fissura começa a se propagar por meio da separação das bordas dos elementos de concreto o elemento de junta passa a ter abertura, como pode ser visto na Fig. 4 (b). Neste elemento é possível estimar as tensões cisalhantes ( $\tau_y$  e  $\tau_z$ ) e normal ( $\sigma_x$ ), bem como os deslocamentos nas três direções.



**Figura 4: Representação da abertura de fissura em um elemento de junta localizado entre dois elemento.**

Apesar de na prática a abertura da fissura só ocorre quando a tensão no concreto atinge a resistência a tração do mesmo, na implementação do elemento junta torna-se inviável a não abertura da junta antes de atingir a resistência a tração  $f_t$ . A solução encontrada para tal problema é implementar um modelo em que a junta possua elevada rigidez antes de atingir a resistência de tração do concreto. Isso implica em pequenos deslocamentos iniciais. Após a tensão na junta atingir a tensão equivalente a resistência de tração do concreto, a resistência cai abruptamente

com base em uma curva exponencial, provocando com isso a abertura da fissura. Com a separação das bordas dos elementos de concreto surge uma tensão de ligação  $\sigma_{cj}$  que representa a resistência oferecida pelo concreto a propagação da fissura. Tal tensão é tomada como sendo uma função do tamanho da separação  $\delta$  das bordas da fissura, como visto na Fig. 5.



**Figura 5: (a) Curva tensão de ligação/deslocamento; (b) Modelo de distribuição de tensão na fissura. Modificado de Zivaljic, et al. (2014).**

Neste modelo pode-se observar na curva tensão/deslocamento duas regiões bem definidas. Uma região elástica que vai da separação  $\delta = 0$  da junta até a separação  $\delta = \delta_t$  (separação correspondente a tensão de ligação quando esta é igual a resistência à tração do concreto  $f_t$ ). De modo que antes de atingir a tensão de resistência à tração  $f_t$ , a tensão de ligação aumenta com o aumento da separação  $\delta$ . Enquanto a outra região representa o comportamento de “amolecimento” do concreto (abertura da fissura) que vai da separação  $\delta_t$  da junta até a separação  $\delta_c$  (separação crítica). Após atingir a tensão de resistência à tração  $f_t$ , a tensão diminui com o aumento da separação  $\delta$  e em  $\delta = \delta_c$  a tensão de ligação tende a zero, como pode ser visto na Fig. 5.

A região elástica é definida no domínio  $\delta \in (0, \delta_t)$ . A tensão de resistência de tração  $f_t$  é uma propriedade do material e a separação  $\delta_t$  é definida pela equação:

$$\delta_t = \left[ \frac{2hf_t}{p_0} \right] \quad (3)$$

onde  $\delta_t$  é a separação correspondente a tensão de ligação quando esta é igual a resistência à tração do concreto  $f_t$ ,  $h$  é uma medida do tamanho dos elementos de concreto e  $p_0$  é um termo utilizado para ajuste da curva. A introdução da variável  $h$  permite que a separação dos elementos adjacentes seja normalizada pelo tamanho dos elementos do concreto e é calculado pela seguinte formula:

$$h = \left[ \frac{V_1 + V_2}{2A} \right] \quad (4)$$

onde  $V_1$  e  $V_2$  representa, respectivamente, os volumes do elemento 1 e do elemento 2 que estão em contato e  $A$  representa a área do elemento de junta (área equivalente a face de contato entre os elementos 1 e 2).

Após a junta atingir a tensão equivalente a resistência a tração do concreto  $f_t$ , a abertura da fissura se desenvolverá com base na curva exponencial dado pela equação a seguir:

$$\sigma_{cj} = z f_t \quad (5)$$

onde  $z$  é uma função heurística (um procedimento simplificador, embora não simplista, que, em face de questões difíceis envolve a substituição destas por outras de resolução mais fácil a fim de encontrar respostas viáveis, ainda que imperfeitas). Tal função representa uma aproximação das curvas de tensão-deslocamento experimentais tomadas de acordo com Hordijk (1992). A função  $z$  é apresentada a seguir:

$$z(D_t) = [1 + (C_1 D_t)^3] e^{-C_2 D_t} - D_t (1 + C_1^3) e^{-C_2} \quad (6)$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes obtidas através de aproximação de curvas experimentais de peças de concreto submetida a tração e valem respectivamente 3 e 6,93 (neste trabalho adotou-se  $C_1 = 3$  e  $C_2 = 7$ ), enquanto que o parâmetro de dano  $D_t$  é determinado de acordo com a seguinte expressão:

$$D_t = \begin{cases} (\delta - \delta_t)/(\delta_c - \delta_t), & \text{se } \delta_t < \delta < \delta_c; \\ 1, & \text{se } \delta > \delta_c; \end{cases} \quad (7)$$

Neste trabalho, a abertura crítica da fissura foi utilizada para calibração do modelo, uma vez que a obtenção experimental de  $\delta_c$  é bastante difícil.

Para valores negativos de  $\delta$  (concreto em compressão) optou-se por atribuir rigidez bem elevada ao elemento de junta com objetivo que este apenas repasse as tensões entre elementos de concreto, reduzindo com isso a existência de sobreposição entre esses elementos. A tensão  $\sigma_{cj}$  para deslocamentos negativos é dado pela equação a seguir:

$$\sigma_{cj} = \frac{2\delta}{\delta_t} f_t, \text{ se } \delta < 0; \quad (8)$$

Após a definição do modelo da rigidez normal do elemento junta, torna-se necessário definir a rigidez cisalhante para assim o modelo ficar completo. Segundo Munjiza, *et al.* (1999), as bordas de dois elementos adjacentes são mantidos juntas pela tensão de cisalhante  $\tau$ . Essa tensão é calculada de forma elástica em função do deslizamento  $s$ , como:

$$\tau = k_c s \quad (9)$$

onde  $k_c$  é a rigidez cisalhante.

### 4.3 Modelo constitutivo do aço

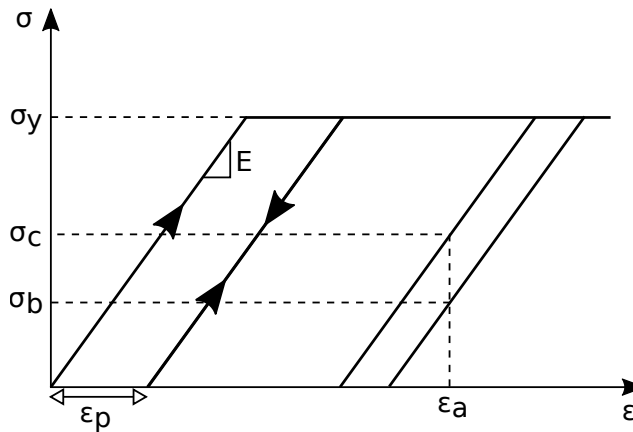
Uma vez que o aço estrutural é usado na fabricação do concreto, sob a forma de barras ou de fio de reforço, não é necessário introduzir as complexidades das relações constitutivos tridimensionais, visto que as tensões fora do seu eixo principal são desprezadas. Logo, é suficiente a idealização da relação unidimensional de tensão-deformação para esse material (Kwak e Fillippou, 1990). Em vista disso, as curvas típicas de tensão-deformação para aço são obtidas a



partir de ensaios em que barras são submetidas a tração uniaxial. Apesar dos ensaios, de tração e compressão do aço, demonstrarem sutis diferenças, para todos os efeitos práticos, essas curvas são adotadas como sendo iguais.

O modelo elasto-plástico perfeito pode ser utilizado para representar o comportamento do aço e é caracterizado por uma curva idealizada de tensão-deformação como mostrado na Fig. 6 (Cerrolaza e Flórez-López, 2000). Este modelo não apresenta zona de endurecimento ou amolecimento, dessa forma é possível representa-lo através de duas zonas, denominadas de zona elástica e a zona plástica.

A zona elástica é caracterizada por  $\sigma < \sigma_y$ , onde  $\sigma$  é a tensão normal e  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento, sendo esse último uma propriedade dependente do material. Nesta zona as deformações são elásticas e não há deformações plásticas adicionais, embora esse tipo de deformação possa existir devido a carregamentos anteriores. Enquanto a zona plástica, é caracterizada por  $\sigma = \sigma_y$ , na qual se produz um incremento indeterminado das deformações plásticas. Em virtude disso, é possível observar que nesse modelo a tensão axial jamais pode superar a tensão de escoamento.



**Figura 6:** Curva tensão-deformação do modelo elasto-plástico perfeito. Modificado de Cerrolaza e Flórez-López (2000).

Conforme Cerrolaza e Flórez-López (2000), a principal dificuldade para representação matemática do modelo elasto-plástico perfeito consiste em que cada valor da deformação  $\varepsilon$  pode corresponder a uma infinidade de tensões normais, como pode ser visto na Fig. 6 ( $\varepsilon_a$  pode estar associada com  $\sigma_b$  ou  $\sigma_c$  de acordo com o valor da deformação plástica). É por isso que se faz necessário a introdução das “variáveis internas” (representadas pelas deformações plásticas) que devem ser incluídas para definir exclusivamente a tensão normal. Por tanto, para cada conjunto de valores da deformação  $\varepsilon$  e da deformação plástica  $\varepsilon_p$  correspondente há uma só tensão normal  $\sigma$  definida pela expressão:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (10)$$

onde o  $E$  representa o módulo de Young do aço.

#### 4.4 Modelo constitutivo do elemento de junta da interface aço-concreto

O modelo semi-embutido, visto na Fig. 7, permite que as barras da armadura sejam embutidas livremente nos elementos de concreto. Isso é possível pelo fato dos elementos de reforço serem tratados como elementos discretos, uma vez que em cada intersecção entre um elemento de concreto e um elemento de reforço é adicionado um nó no elemento de barra, acrescentando assim, novos graus de liberdade ao sistema (Durand, 2008). Nesta abordagem cada porção do reforço contido dentro de um elemento de concreto é considerada um elemento de barra independente, o que possibilita a aplicação de condições de contorno nodal, como por exemplo, força ou deslocamentos impostos, bem como a obtenção dos campos de tensões e deformações ao longo da barra.

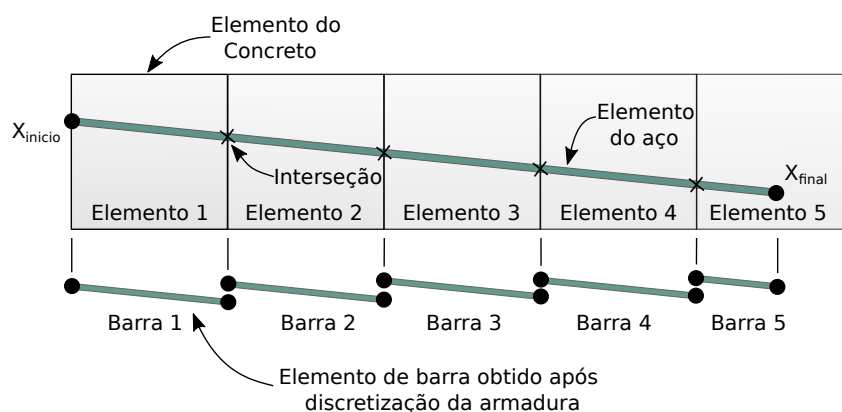
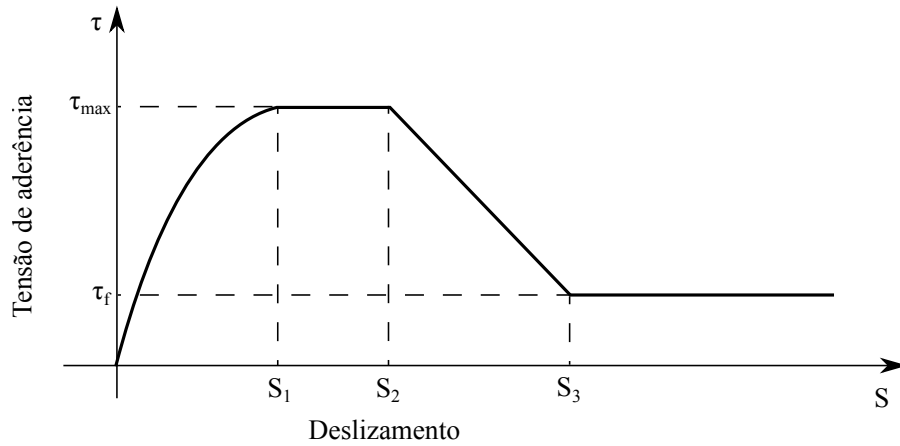


Figura 7: Discretização da armadura pelo método semi-embutido. Modificado de Durand e Farias (2012).

Nesta abordagem as barras de aço são ligadas aos elementos sólidos por meio de elementos de juntas que representam fisicamente a interface aço-concreto. Esses elementos possuem a capacidade de avaliar as tensões cisalhantes no contato e o deslizamento relativo entre o aço e o concreto, sendo necessário atribuir aos elementos de interface parâmetros de rigidez de contato e a tensão de ruptura. Dessa forma é possível simular diversos níveis de aderência no contato aço-concreto através da variação do parâmetro de rigidez do elemento de junta.

Esses parâmetros podem ser obtidos através do Código Modelo 2010 do CEB-FIP, que trás de forma genérica a relação da tensão de aderência/deslizamento da armadura do concreto armado, como mostrado na Fig. 8. No diagrama apresentado nesta figura, pode-se observar um ramo ascendente não linear até  $S_1$  onde se atinge a tensão máxima de aderência  $\tau_{max}$  (tensão cisalhante). Após esse ramo verificou-se um patamar entre  $S_1$  e  $S_2$  onde há aumento do “deslizamento” da armadura sem haver aumento da tensão de aderência. Em seguida, constatou-se um ramo descendente linear entre  $S_2$  e  $S_3$  até atingir a tensão de aderência residual  $\tau_f$ . E por fim, o diagrama apresenta mais um patamar, após atingir o  $S_3$ , mantendo a tensão constante e igual a residual com o aumento do “deslizamento” da armadura.

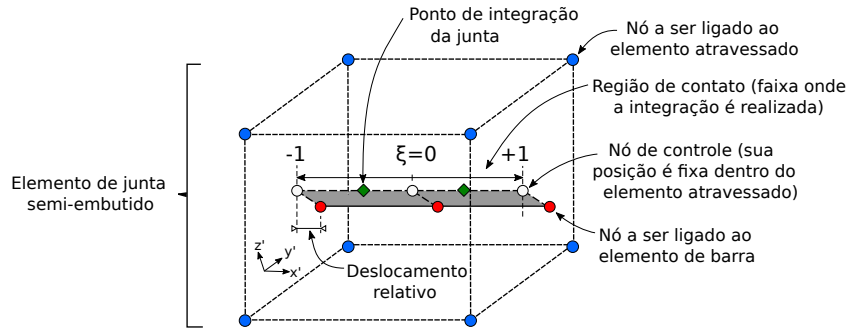
Por outro lado, a formulação da armadura segue a formulação convencional dos elementos finitos para barra, o que realmente diferencia o método semi-embutido dos demais é a formulação específica dos elementos de junta. Neste modelo existem duas abordagens distintas para modelar o elemento de interface, a primeira, “modelagem pontual da interface” introduzida por Durand (2008) e, a segunda, “modelagem contínua da interface” que foi resultado do aperfei-



**Figura 8: Diagrama tensão de aderência-deslizamento para carregamento uniaxial. Modificado do Código Modelo 2010 do CEB-FIP, (2013).**

çoamento do primeiro modelo realizado por Durand & Farias (2012). Pelo fato da segunda abordagem permitir uma simulação mais realista, a mesma foi utilizada nesse trabalho.

Através da Fig. 9 é possível obter uma melhor compreensão de como é modelado o elemento de junta no método semi-embutido. Nesta figura os nós azuis são conectados aos elementos sólidos, enquanto os nós vermelhos, de forma análoga, são conectados aos elementos de barra. Por fim, os círculos brancos representam a posição inicial dos nós do elemento de barra (nós de controle). Também pode ser observado o sistema local do elemento de junta ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ).

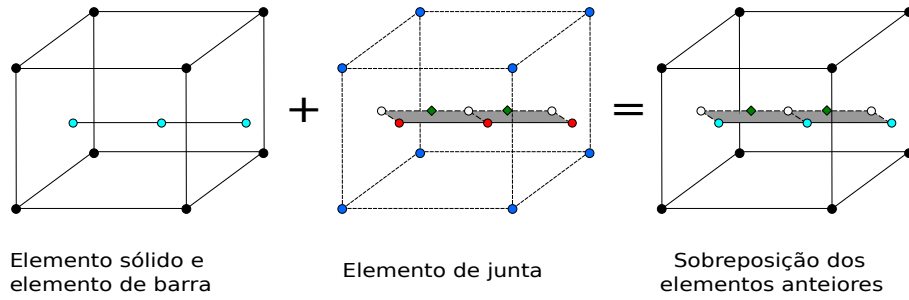


**Figura 9: Elemento de junta do modelo semi-embutido. Modificado de Durand e Farias (2012).**

É importante ressaltar que este elemento de interface se sobrepõe ao elemento sólido atravessado, bem como ao elemento de barra como pode ser visto na Fig. 10.

Os deslocamentos relativos de um ponto ao longo da região de contato em relação às coordenadas locais  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  são expressos pelo vetor  $\bar{\mathbf{u}} = [u_{x'}^r, u_{y'}^r, u_{z'}^r]^T$ . Geralmente, as rigidezes nas direções  $y'$  e  $z'$  são bastante elevadas com o intuito de permitir do deslizamento apenas no eixo  $x'$  da barra. O vetor  $\bar{\mathbf{u}}$  pode ser calculado através dos deslocamentos nodais do elemento com a armadura semi-embutida, por meio da matriz de transformação  $\mathbf{B}$ , como pode ser visto a seguir:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (11)$$



**Figura 10: Sobreposição do elemento de junta ao elemento sólido e a barra.**

onde o vetor  $\mathbf{u}$  é composto pelos deslocamentos nodais do sólido atravessado pela armadura  $\mathbf{u}^s$  e pelos deslocamentos nodais da barra  $\mathbf{u}^b$ , como observado a seguir:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}^b \end{bmatrix} \quad (12)$$

A matriz  $\mathbf{B}$  relaciona os deslizamentos relativos da barra com a tensão cisalhante da interface e é dada pela equação:

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}[\mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}] \quad (13)$$

onde  $\mathbf{R}$  representa a matriz de rotação dos cossenos diretores nas direções  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ ,  $\mathbf{N}$  é a matriz que contém as funções de interpolação da região da interface e por fim a matriz  $\mathbf{M}$  é a matriz de interpolação, de tal forma que as componentes  $M_{ij}$  representa a função de forma do nó  $i$  do elemento sólido avaliados na posição do nó  $j$  do elemento de barra.

Após o cálculo da matriz  $\mathbf{B}$ , a rigidez dos elementos de interface pode ser determinada pela equação:

$$\mathbf{K} = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} P dx' \quad (14)$$

onde  $\mathbf{D}$  representa a matriz constitutiva do elemento de interface que relaciona o vetor deslocamento com os incrementos no vetor de tensões na região de contato,  $P$  é o perímetro da barra e  $dx'$  é o diferencial de comprimento de contato da interface e  $L$  é o comprimento do elemento de contato.

A matriz constitutiva do elemento de interface  $\mathbf{D}$  é dada por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_n & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

onde  $k_s$  é a rigidez tangencial de contato e  $k_n$  é a rigidez normal de contato.

Após várias análises, Durand & Farias (2012), chegaram a conclusão que o aço poderia ser representado adequadamente por elementos de barra de três nós e consequentemente por elementos de junta com três nós, uma vez que as tensões nas barras de três nós variam de forma linear. Vários testes de validação foram realizados por Del Río Gaitán (2015).

## 5 SOFTWARES DE ELEMENTOS FINITOS E DE VISUALIZAÇÃO

As análises das estruturas de concreto armado foram obtidas por meio da utilização da biblioteca de elementos finitos FemLab. Este programa foi escrito na linguagem de programação Julia (uma linguagem dinâmica de alto nível, apropriada para computação numérica e científica). O FemLab permite realizar análises estáticas lineares e não lineares em duas ou três dimensões utilizando elementos isoparamétricos. Este programa computacional já foi utilizado em outras pesquisas como as de Vélez (2015), Del Río Gaitán (2015) e Rosales (2016).

Após a análise de elementos finitos, o *software* responsável pelo pós-processamento dos resultados foi o Paraview. Esse programa foi, inicialmente, desenvolvido com o intuito de realizar análise, visualização e exploração de dados de forma interativa em 3D. Vale destacar ainda que se trata de um programa de código aberto e multi-plataforma.

## 6 ESTUDO NUMÉRICO

A seguir são apresentadas as informações dos ensaios experimentais que foram utilizadas para calibrar o modelo numérico. Logo após essa etapa foram apresentados os resultados obtidos nas análises numéricas e por fim foi feita a discussão dos resultados obtidos.

### 6.1 Informações dos experimentos

Neste trabalho serão utilizados os resultados obtidos nos ensaios realizados por Bresler & Scordelis em 1963. De acordo com Vecchio & Shim (2004), essa série de testes clássicos é considerada como um ponto de referência com o qual os modelos de análise de elementos finitos podem ser calibrados. Tais testes tinham por objetivo investigar o comportamento das vigas de concreto armado ao cisalhamento crítico, além do fornecimento de dados para estudos numéricos.

A Fig. 11 mostra a seção transversal das vigas ensaiadas por Bresler & Scordelis. Por tanto a disposição das armaduras. Por sua vez, a Tabela 1 apresenta de forma mais detalhada as dimensões das vigas, bem como a quantidade de vergalhões, estribos e suas bitolas.

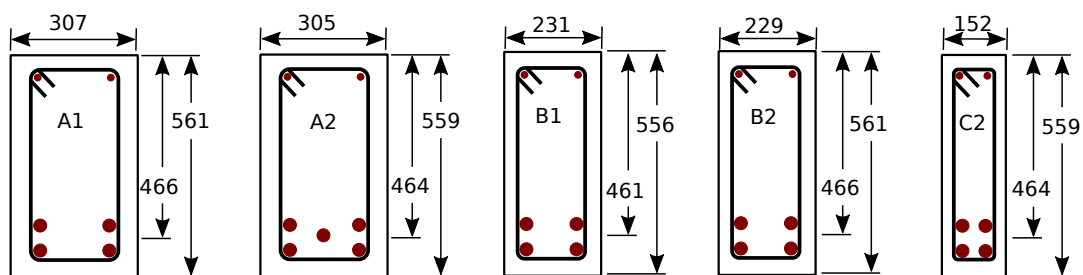


Figura 11: Detalhe da seção transversal da viga de Bresler & Scordelis. Modificado de Vecchio & Shim, 2004.

A Tabela 2 detalha as dimensões da armadura como o diâmetro e área das barras de aço, além de fornecer as propriedades físicas do aço como a tensão de escoamento  $f_y$ , tensão última  $f_u$  e o módulo de Young  $E_s$ . Nessa tabela, também são fornecidos as propriedades do concreto como módulo de Young  $E_c$  e a resistência a tração  $f_t$ .

**Tabela 1: Detalhes das vigas ensaiadas por Bresler & Scordelis (Vecchio & Shim, 2004).**

Viga	b (mm)	h (mm)	d (mm)	L (mm)	vão (mm)	Aço inf.	Aço sup.	Estribo
A1	307	561	466	4,100	3,660	4 No. 9	2 No. 4	No. 2 em 210
A2	305	559	464	5,010	4,570	5 No. 9	2 No. 4	No. 2 em 210
B1	231	556	461	4,100	3,660	4 No. 9	2 No. 4	No. 2 em 190
B2	229	561	466	5,010	4,570	4 No. 9	2 No. 4	No. 2 em 190
C2	152	559	464	5,010	4,570	4 No. 9	2 No. 4	No. 2 em 210

**Tabela 2: Propriedade do aço e do concreto das vigas ensaiadas por Bresler & Scordelis (Vecchio & Shim, 2004).**

Propriedades do aço					
Tamanho da barra	Diâmetro (mm)	Área (mm <sup>2</sup> )	$f_y$ (MPa)	$f_u$ (MPa)	$E_s$ (MPa)
No. 2	6.4	32.2	325	430	190,000
No. 4	12.7	127	345	542	201,000
No. 9	28.7	645	555	933	218,000
Propriedades do concreto					
Viga	$E_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	Viga	$E_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)
A1	36.5	3.86	B2	32.9	3.76
A2	32.9	3.73	C2	32.9	3.93
B1	36.5	3.99			

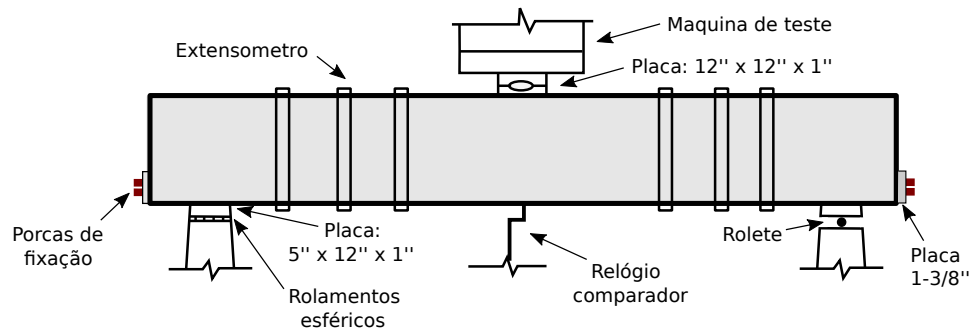
As condições de apoio, necessárias para simulação numérica correspondem ao desenho esquemático do ensaio visto na Fig. 12. Por fim, na Tabela 3 são apresentadas as cargas últimas  $P_u$  resistidas pelas vigas, bem como, os deslocamentos últimos  $\delta_u$  e o modo de ruptura.

**Tabela 3: Resultado dos ensaios realizados por Bresler & Scordelis (Vecchio & Shim, 2004).**

Viga	$P_u$ (kN)	$\delta_u$ (mm)	Falha por	Viga	$P_u$ (kN)	$\delta_u$ (mm)	Falha por
A1	467	14.2	cisalhamento	B2	400	20.8	cisalhamento
A2	489	22.9	cisalhamento	C2	325	20.1	cisalhamento
B1	445	13.7	cisalhamento				

## 6.2 Análise numérica

A partir dos dados apresentados foi possível simular computacionalmente os experimentos citados. As análises utilizaram o modelo constitutivo elástico-linear para simular o concreto, enquanto que para interface concreto-concreto foi utilizada o modelo modificado de Zivaljic, et al. (2014), já o aço foi simulado pelo modelo elasto-plástico perfeito e a interface aço-concreto



**Figura 12: Desenho esquemático do ensaio realizado por Bresler & Scordelis. Modificado de Vecchio & Shim, 2004.**

utilizou-se o modelo semi-embutido. O concreto foi simulado na malha por elementos hexaédricos de oito nós, enquanto que a interface concreto-concreto utilizou elementos de interface 2D. Já a armadura foi simulado por elementos de treliça de três nós e a interface aço-concreto foi simulado por elementos de junta 1D de três nós. Informações adicionais sobre a malha são apresentados na Tabela 4.

No início da análise, realizou-se a calibração do modelo através de ajustes nos parâmetros como a abertura crítica de fissura  $w_c$ , o parâmetro  $p_0$  e da rigidez cisalhante do concreto  $k_s$ . Essa calibração foi feita com intuito de simular os resultados dos deslocamentos ocasionados pela aplicação da carga na viga. Após a análise de elementos finitos, obteve-se as flechas no meio do vão  $\delta'_u$ , tais resultados são apresentados na Tabela 5, assim como  $\delta_u$  experimental. Por sua vez, as Fig. 13, 14, 15, 16 e 17 apresentam as curvas carga-deslocamento experimental e numérico permitindo melhor visualização e comparação entre os mesmos. Além disso, essas figuras trazem os valores dos parâmetros empregados.

**Tabela 4: Dados das malhas utilizadas nas análises numéricas.**

Viga	Graus de liberdade	Quantidade de nós	Elementos hexaédricos	Juntas 2D	Elementos treliça	Juntas 1D
A1	14990	1961	488	1140	548	548
A2	15958	2281	488	1140	708	708
B1	14998	1961	488	1140	548	548
B2	15958	2281	488	1140	708	708
C2	15718	2201	488	1140	668	668

**Tabela 5: Resultado obtidos pela análise numérica.**

Viga	$P_u$ (kN)	$\delta'_u$ num. (mm)	$\delta_u$ exp. (mm)	Viga	$P_u$ (kN)	$\delta'_u$ num. (mm)	$\delta_u$ exp. (mm)
A1	467	14.4	14.2	B2	400	17.0	20.8
A2	489	19.0	22.9	C2	325	19.9	20.1
B1	445	14.4	13.7				

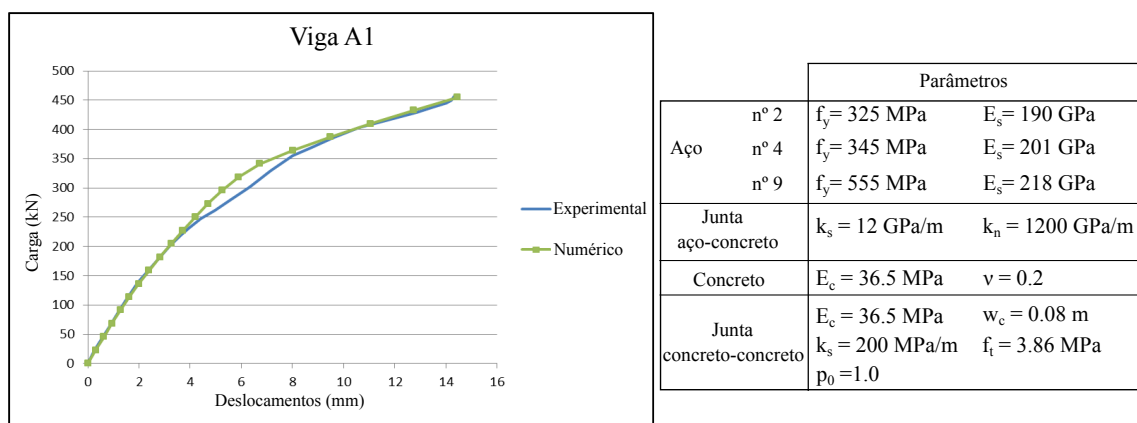


Figura 13: Comparativo do resultado experimental com o numérico viga A1.

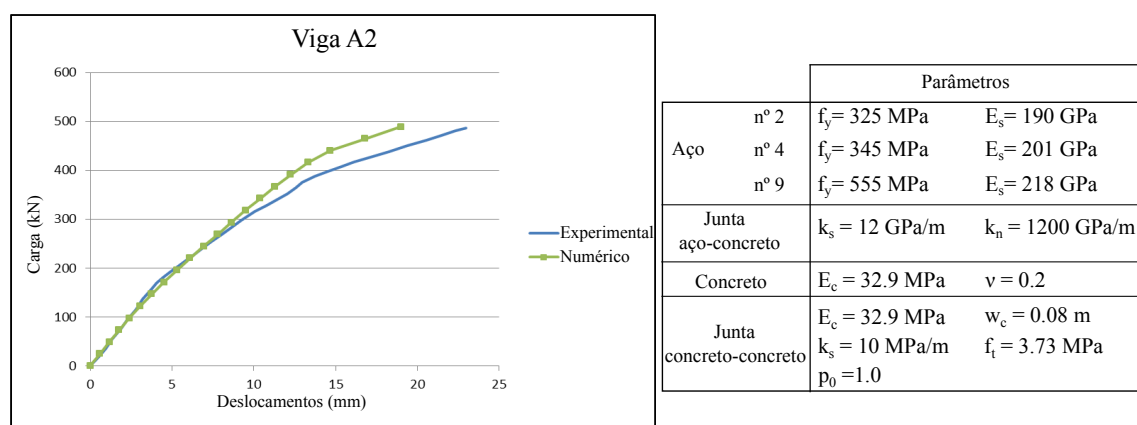


Figura 14: Comparativo do resultado experimental com o numérico viga A2.

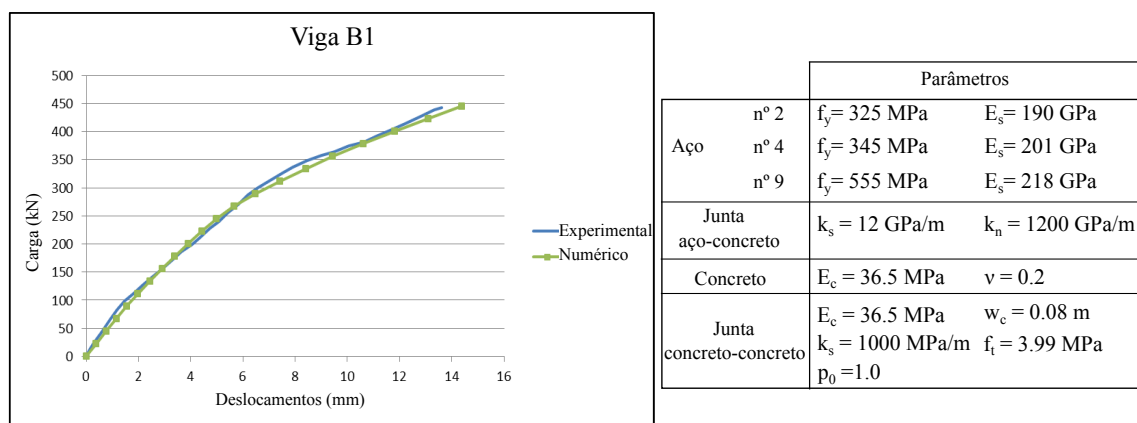
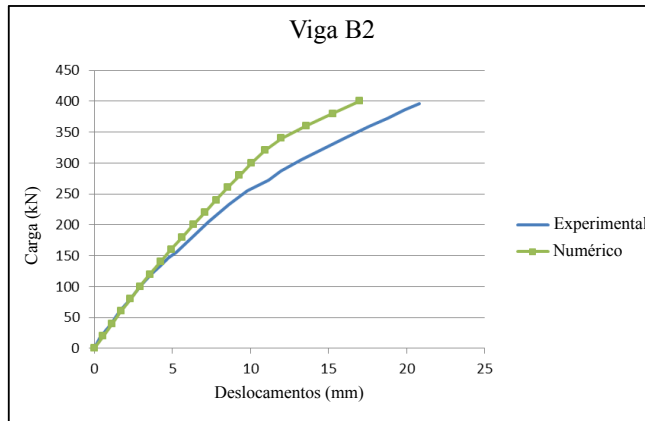


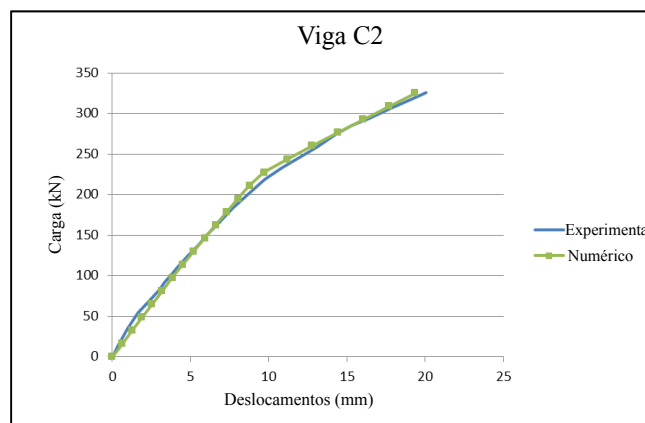
Figura 15: Comparativo do resultado experimental com o numérico viga B1.





Parâmetros		
Aço	n° 2	$f_y = 325 \text{ MPa}$ $E_s = 190 \text{ GPa}$
	n° 4	$f_y = 345 \text{ MPa}$ $E_s = 201 \text{ GPa}$
	n° 9	$f_y = 555 \text{ MPa}$ $E_s = 218 \text{ GPa}$
Junta aço-concreto		$k_s = 12 \text{ GPa/m}$ $k_n = 1200 \text{ GPa/m}$
Concreto		$E_c = 32.9 \text{ MPa}$ $\nu = 0.2$
Junta concreto-concreto		$E_c = 32.9 \text{ MPa}$ $w_c = 0.08 \text{ m}$ $k_s = 10 \text{ MPa/m}$ $f_t = 3.76 \text{ MPa}$ $p_0 = 1.0$

**Figura 16: Comparativo do resultado experimental com o numérico viga B2.**



Parâmetros		
Aço	n° 2	$f_y = 325 \text{ MPa}$ $E_s = 190 \text{ GPa}$
	n° 4	$f_y = 345 \text{ MPa}$ $E_s = 201 \text{ GPa}$
	n° 9	$f_y = 555 \text{ MPa}$ $E_s = 218 \text{ GPa}$
Junta aço-concreto		$k_s = 12 \text{ GPa/m}$ $k_n = 1200 \text{ GPa/m}$
Concreto		$E_c = 32.9 \text{ MPa}$ $\nu = 0.2$
Junta concreto-concreto		$E_c = 32.9 \text{ MPa}$ $w_c = 0.08 \text{ m}$ $k_s = 100 \text{ MPa/m}$ $f_t = 3.93 \text{ MPa}$ $p_0 = 1.0$

**Figura 17: Comparativo do resultado experimental com o numérico viga C2.**

Na Fig. 18 é possível visualizar o campo de deslocamentos obtido do ensaio numérico da viga A1. Nessa imagem observa-se a aplicação gradual da carga, partindo da posição inicial da viga até a aplicação da carga última ( $P_u$ ) em incrementos de  $0.25 P_u$  (No caso da viga A1  $P_u$  vale 467 kN). O efeito do deslocamento nas imagens está multiplicado por um fator de escala 30 para permitir a visualização das fissuras.

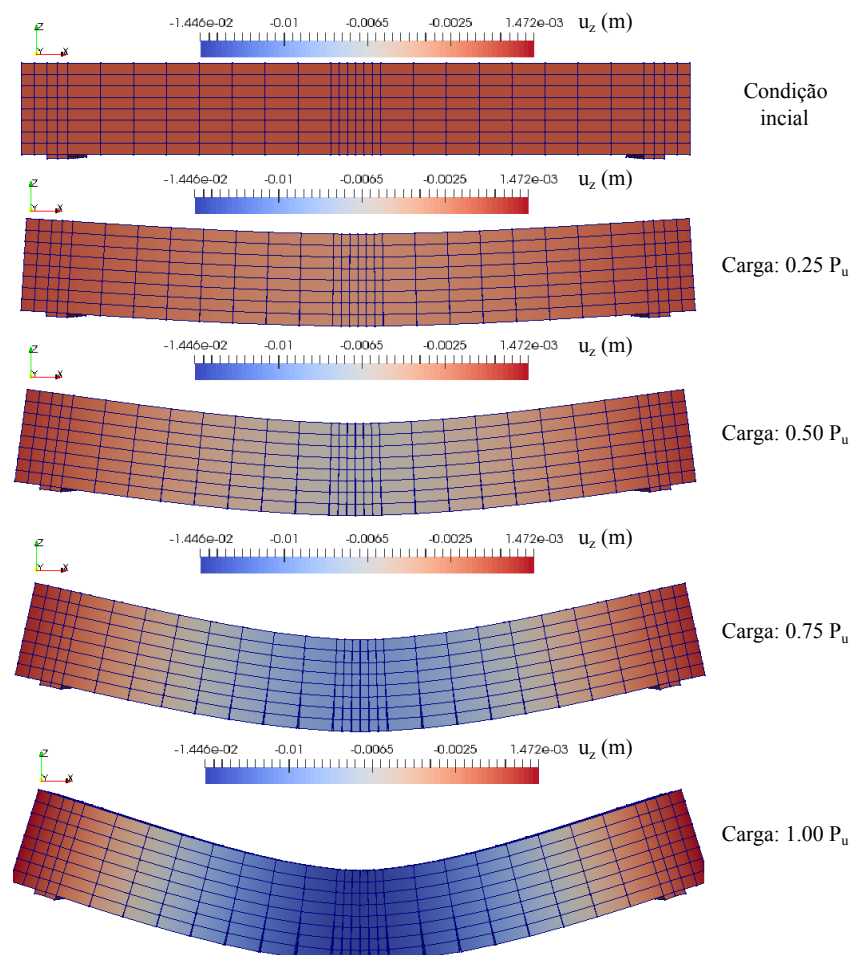


Figura 18: Campo de deslocamentos verticais obtidos no ensaio numérico da viga A1 em metros.

### 6.3 Discussões dos resultados

Através dos resultados obtidos pode-se concluir que as vigas A1, B1 e C2 foram simuladas de forma adequada, sendo que o modelo conseguiu simular tanto a parte linear como a parte não-linear do gráfico mostrando o grande potencial que essa abordagem possui. As vigas A2 e B2 não convergiram tão satisfatoriamente como as anteriores, porém o modelo conseguiu mostrar a tendência do deslocamentos das vigas nos ensaios.

Os resultados numéricos mostraram, ainda, que o modelo de fissura discreta conseguiu simular de forma satisfatória as fissuras verticais, porém não conseguiu simular da mesma forma as fissuras inclinadas. Isso ocorreu, pelo fato do cisalhamento estar sendo simulado de forma elástica e, também, pelo tipo de malha empregada na análise que restringiu o aparecimento de fissuração inclinada. Em virtude disso, pretende-se aprofundar a pesquisa com a utilização de

novas malhas e o aperfeiçoamento desse modelo com intuito de melhorar a representação do cisalhamento.

O modelo de fissuração apresentou problema de convergência, isso se deve a existência de um pico no diagrama tensão/deslocamento da junta (Fig. 5) quando a abertura da fissura atinge  $\delta_t$ . Esse problema foi contornado utilizando parâmetros que suavizassem a região próxima ao pico. Já o modelo semi-embutido não apresentou tal problema e funcionou adequadamente permitindo a simulação da interface aço-concreto.

Por fim, é importante ressaltar que o modelo de fissura discreta sofre grande influência exercida pela malha, uma vez que o aumento do refinamento da mesma gera redução da rigidez global da estrutura ao adicionar mais elementos de junta ao sistema. Porém, esse problema foi reduzido pela adição da variável “ $h$ ” que tende a normalizar  $\delta_t$  com base no tamanho dos elementos de concreto.

## CONCLUSÕES

O comportamento do concreto armado é bastante influenciado pela fissuração e pela forma como o aço e o concreto interagem, portanto, torna-se uma questão essencial a adequada representação desses fatores para a obtenção de resultados satisfatórios. Tendo em vista isso, esse trabalho buscou simular tanto as fissuras como a interface aço-concreto por meio de elementos de junta. Isso permitiu representar de forma mais realista as fissuras através do afastamento dos elementos de concreto, além de possibilitar a atribuição de propriedades a interface aço-concreto e assim simular adequadamente a aderência entre os dois materiais.

Os resultados obtidos na análise numérica mostraram que a aplicação do modelo semi-embutido em conjunto com o modelo discreto de fissuração é uma boa alternativa para a modelagem do concreto armado. Isso se deve, ao fato desses modelos permitem um elevado controle sobre os parâmetros que ditam o comportamento das interfaces aço-concreto e concreto-concreto, o que se demonstrou de suma importância para a simulação do comportamento da viga.

## BIBLIOGRAFIA

- Azimi, M., Adnan, A. B., Osman, M. H., Sam, A. R. B. M., Faridmehr, I. & Hodjati, R., 2014. Energy Absorption Capacity of Reinforced Concrete Beam-Column Connections, with Ductility Classe Low. *American Journal of Civil Engineering and Architecture*, pp. 42-52.
- CEB/FIP Model Code 2010, 2013. fib Model Code for Concrete Structures 2010. Comité Euro-International du Béton. Lausana.
- Cerrolaza, M. & Flórez-López, J., 2000. Modelos matemáticos en ingeniería moderna.1ª ed. Caracas: Editora Universidad Central de Venezuela.
- Del Río Gaitán, J. D. G., 2015. *Aplicação do método de elementos finitos semi-embutidos na simulação de vigas de concreto armado*. Dissertação de mestrado, Universidade of Brasília/ Brasília.
- Durand, R., 2008. *Análise tridimensional de estruturas geotécnicas submetidas a reforço e drenagem*. Tese de doutorado, Universidade of Brasília/ Brasília.

- Durand, R. & Farias, M., 2012. Nonlinear Joint Element for the Analysis of Reinforcement 10<sup>o</sup> *World Congress on Computational Mechanics*, vol. 1 , pp. 1-16.
- Hordijk, D. A., 1992. Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete - experiments, modelling and analyses. *Heron*, Vol. 37 No. 1, pp. 3-79.
- Kwak, H. G. & Fillippou, F. C., 1990. *Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads*. Dissertação de mestrado, University of Delaware/ Newark.
- Munjiza, A., Andrews, K. R. F. & White, J. K., 1999. Combined single and smeared crack model in combined finite-discrete element analysis *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 41-57.
- Ottosen, N. S., 1977. A failure criterion for concrete *Jornal of the Engineering Mechanics Division*, pp. 527-535.
- Rosales, Y. M., 2016. *Análise numérica - experimental do comportamento da aderência do aço-concreto*. Dissertação de mestrado, Universidade of Brasília/ Brasília.
- Tzamtzis, D. A., 1998. Finite element modeling of cracks and joints in discontinuous structural systems *ASCE Engineering Mechanics Conference*, vol. 16, pp. 16-18.
- Vélez, D. I. A., 2015. *Otimização de estruturas reticuladas utilizando algoritmos genéticos*. Dissertação de mestrado, Universidade of Brasília/ Brasília.
- Vecchio, F. J. & Shim, W., 2004. Experimental and analytical reexamination of classic concrete beam tests *Journal of Structural Engineering*, pp. 460-469.
- Zivaljic, N., Nikolic, Z. & Smoljanovic, H., 2014. Computational aspects of the combined finite-discrete element method in modelling of plane reinforced concrete structures *Engineering Fracture Mechanics*, pp. 669-686.